技術社会システム

第2回：探索と数え上げ

担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし)

連絡先：thasuike@waseda.jp

前回の演習の解答

演習1-5

- 目的: 4人(A, B, C, D)が橋の片側におり，暗闇の中，全員が橋を渡る.
- 条件1: 懐中電灯が1つあり，橋を渡る人(達)は懐中電灯を持っていかなければならない(懐中電灯は持っていくか，持って戻るかしかなく，投げ渡すことはできないとする).
- 条件2: 橋は一度に最大2人までしか渡ることはできない.
- 条件3: 橋を渡るのに，Aは1分，Bは2分，Cは5分，Dは10分かかる.
- 条件4: 渡る時は，遅い方の人のペースに合わせる.
- 基準: 短時間であるほど良い.

解答例(演習1-5)

- **最短17分**(2通りの解答)

1.	→	(A, B)	1.	→	(A, B)
2.	←	(A,)	2.	←	(B,)
3.	→	(C, D)	3.	→	(C, D)
4.	←	(B,)	4.	←	(A,)
5.	→	(A, B)	5.	→	(A, B)

- 真の最短性を示すには，どんな手順でも最短時間未満にできないことを示す必要がある！

最短性を示す

- 4人が橋を渡りきるには,
  - 2人で橋を渡る回数が3回(→方向)
  - 1人で橋を戻る回数が2回(←方向)
- よって，橋を戻る2回を誰が受け持つかを考えればOK

- Case1：Aさん(1分)が2回とも橋戻り行う場合

→2人で橋を進む時は必ず最速の人が含まれることになる.
　その場合は，最速でも2+1+5+1+10=19分かかる.

- Case2：Aさんが1回，Bさんが1回を行う場合

→2回の橋戻りかかる総時間は最低でも1+2=3分
　3回の橋渡りにかかる総時間は最低でも10+2+2=14分

有限性と無限性

有限性

- 有限集合：

例1　{1, 2, 3}

→集合の記号は{ }で表し，要素を間に書く

例2　-3以上3以下の整数全体

→全ての数を書きあげなくてもOK

(参考：整数全体はZ，自然数全体はNで表現)

例3　$\{(p,q) \mid p, q \in Z, 0 \leqq p \leqq 1, 0 \leqq q \leqq 1\}$

→1つの数字で表されなくても良い (ベクトルや行列の集合も頻出)

例4　{あ, い, う, え, お}　→　数字でなくてもOK

有限性と無限性

無限性

- 無限集合：

例1　自然数全体N＝{1, 2, 3, …}
例2　整数全体Z＝{0, ±1, ±2, …}
例3　有理数全体Q＝{p/q|p∈Z, q∈N}

離散無限

例4　実数全体R＝“整数部分 ＋ 小数部分”で表される数全体
→ 連続無限
(＝有理数からなるコーシー列の同値類全体)

解の探索

アルゴリズムによる解の探索

- 本講義で扱う問題：

- アルゴリズム：

(ポイント)

原理的探索可能性

- 解の候補が有限ならば，有限の時間で全ての可能性を調べられる
- 解が存在する場合は，有限時間で解を探索できるアルゴリズムは存在する　→　しかし…

演習問題です

<u>演習2-1</u>

- ある商人が王様に宝石を献上したところ，王様はその宝石を大変気にいったので，商人に対し望みの褒美を取らせると言った．そこで商人は次のように答えた．
- 「30日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」
- 以下のそれぞれの場合で，受け取れる金貨の総数を求めなさい．

(1)毎日２枚づつ.

(2)１日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

(3)１日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

解答例

演習2-1

- 「30日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」

(1)毎日２枚づつ.

$2\times 30 =$ **60枚**

(2) １日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

$1+3+5+\cdots+57+59 = 60\times 30\times(1/2) =$ **900枚**

(3) １日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

$1+2+4+8+\cdots+2^{29} = 2^{30}-1 =$ **1,073,741,824枚**

(約10.7億枚)

解答例(解き方)

<u>演習2-1</u>

(2) １日目には１枚，そのあと毎日<u>**２枚づつ増やしていく**</u>.

$S = 1+3+5+\cdots+57+59$

$S = 59+57+\cdots+5+3+1$

よって，$2S = 60+60+\cdots+60$　(60を30回足す)

$2S = 60\times 30$

$S = 30\times 30 = 900$

初項1，公差2の等差数列の1項から30項までの和

解答例(解き方)

<u>演習2-1</u>

(3) １日目には１枚，そのあと毎日<u>**２倍づつ増やしていく**</u>.

$$S = 1+2+4+8+\cdots+2^{29}$$

$$2S = \quad 2+4+8+\cdots+2^{29}+2^{30}$$

(下の式)－(上の式)をして，

$$S = 2^{30} - 1 = 1{,}073{,}741{,}824$$

初項1，公比2の等比数列の1項から30項までの和

解答のポイント

演習2-1

- 「30日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」

(1)毎日２枚づつ.

$2\times30=$**60枚**

(2) １日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

$1+3+5+\cdots+57+59=60\times30\times(1/2)=$**900枚**

(3) １日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

$1+2+4+8+\cdots+2^{29}=2^{30}-1=$**1,073,741,824枚**

(1)より(2)，(2)より(3)のほうが圧倒的に多い

→ 数の増え方に違いがある

線形/多項式/指数オーダー

<u>計算の難しさを表すオーダー</u>

- <u>関数のオーダーの典型例</u>
  rは自然数もしくは実数とする
  - 線形オーダー：
  - 多項式オーダー：
  - 指数オーダー：

(他にも様々なオーダーの例があります)

線形/多項式/指数オーダー

計算の難しさを表すオーダー

- 関数のオーダーの典型例

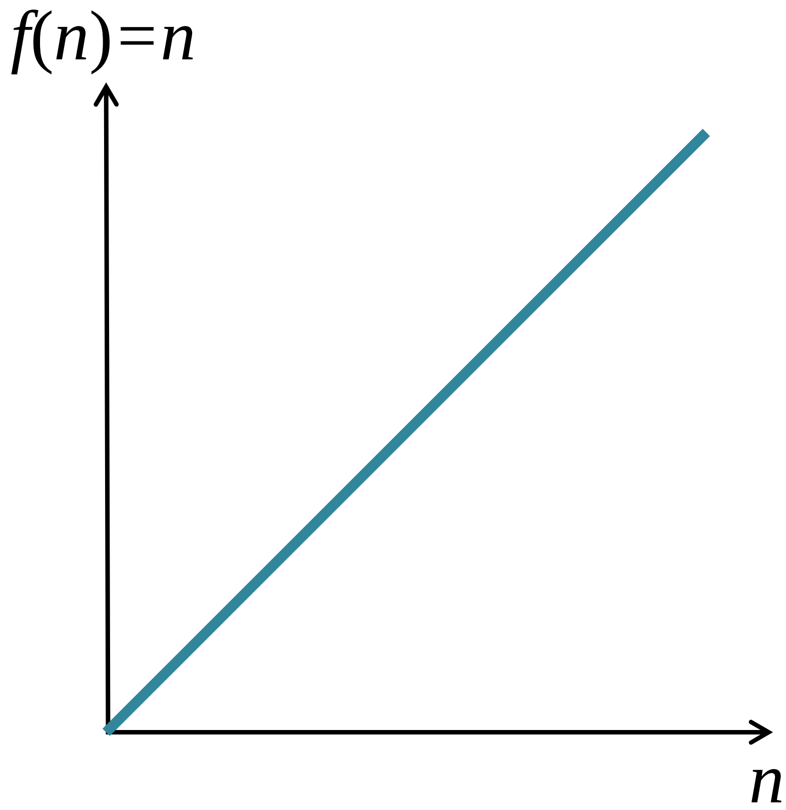
  rは自然数もしくは実数とする：

  – 線形オーダー：(定数)× n

  – 多項式オーダー：(定数)× n^r

  – 指数オーダー：(定数)× r^n

上記の関数の引数nに対する
関数の増加度を考えてみると…

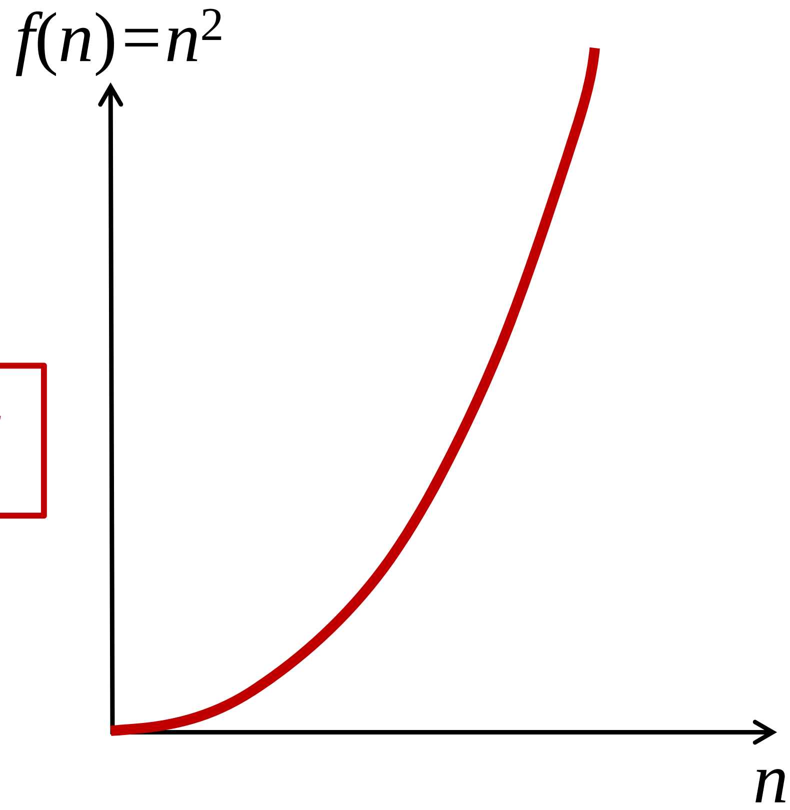


線形/多項式/指数オーダー

計算の難しさを表すオーダー

- 関数のオーダーの典型例
  rは自然数もしくは実数とする：
  - 線形オーダー：(定数)× n
  - 多項式オーダー：(定数)× n^r
  - 指数オーダー：(定数)× r^n

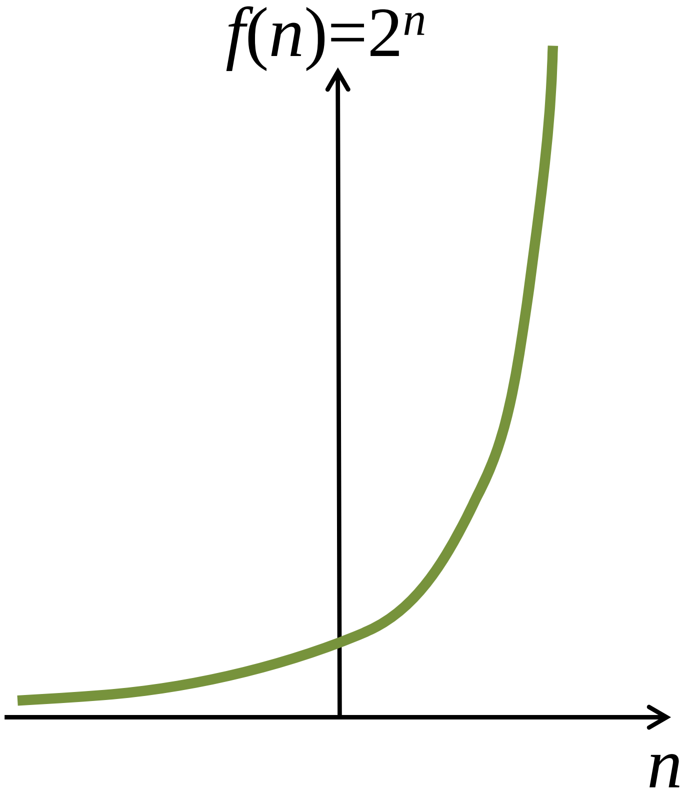
上記の関数の引数nに対する
関数の増加度を考えてみると…



線形/多項式/指数オーダー

計算の難しさを表すオーダー

- 関数のオーダーの典型例
  rは自然数もしくは実数とする：
  - 線形オーダー：(定数)× n
  - 多項式オーダー：(定数)× n^r
  - 指数オーダー：(定数)× r^n



上記の関数の引数nに対する
関数の増加度を考えてみると…

線形/多項式/指数オーダー

計算の難しさを表すオーダー

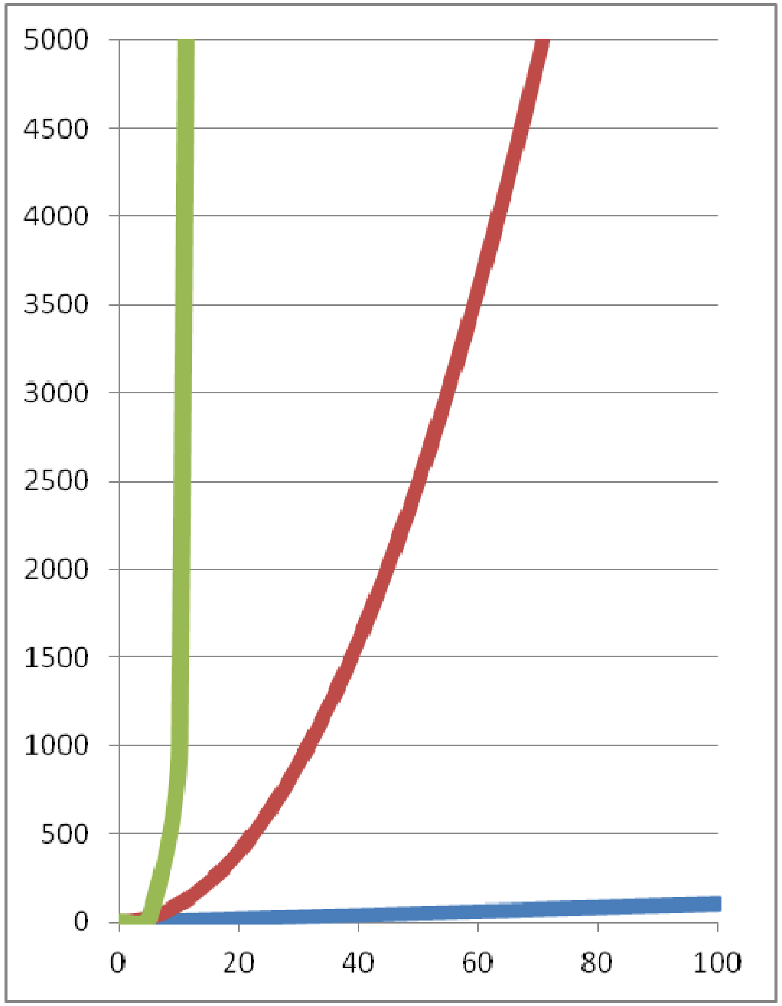
- 関数のオーダーの典型例

  rは自然数もしくは実数とする：

  - 線形オーダー：(定数)× n
  - 多項式オーダー：(定数)× n^r
  - 指数オーダー：(定数)× r^n

(ポイント)

増加のスピードが全く違う！



オーダー表記の練習です

演習2-2

- ある商人が王様に宝石を献上したところ，王様はその宝石を大変気にいったので，商人に対し望みの褒美を取らせると言った．そこで商人は次のように答えた．
- 「**n**日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」
- 以下のそれぞれの場合で，受け取れる金貨の総数を求めなさい．(nを用いて表すこと)

(1)毎日２枚づつ.

(2)１日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

(3)１日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

ヒント

演習2-2

- 「**n**日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」

(1)毎日２枚づつ.

(2) １日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

(3) １日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

一般公式

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$$

一般公式

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

(愚直な)全数探索の限界

- 解の候補が有限ならば，有限の時間で全ての可能性を調べられる
- 解が存在する場合は，有限時間で解を探索できるアルゴリズムは存在する　→　しかし…

- 探索する解の候補が存在する場合 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

→

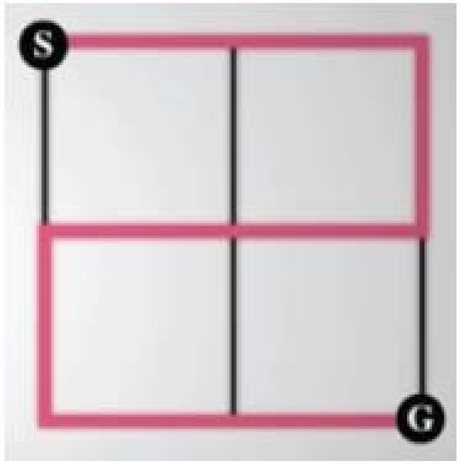
<u>問題のサイズnに対する解の候補数と探索時間の感覚</u>

- 線形オーダー　→
- 多項式オーダー　→
- 指数オーダー　→

実際に数えてみると…

演習2-3

- 目的:格子上で S から G までの道順を全て数え上げる.
- 同じ場所を通らない.



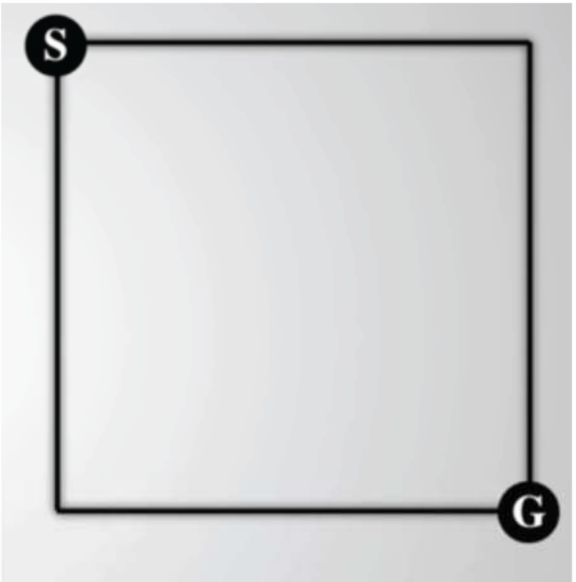


図１：1×1

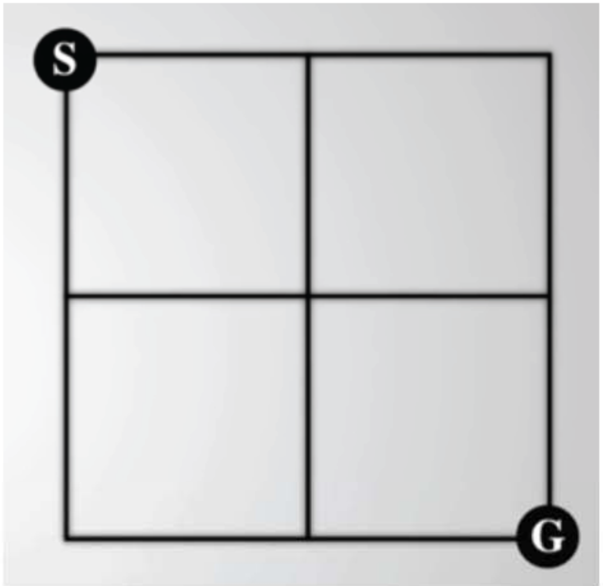


図2：2×2

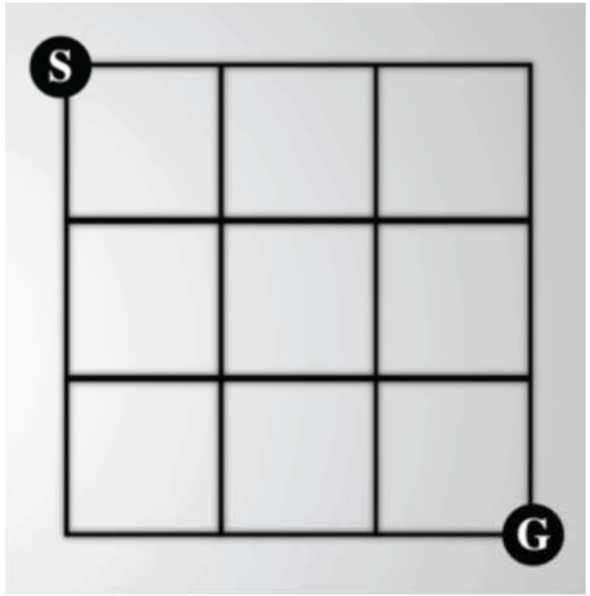
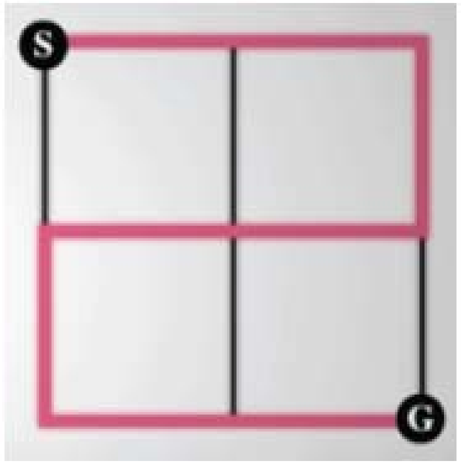


図3：3×3

実際に数えてみると…

演習2-3

- 目的:格子上で S から G までの道順を全て数え上げる.
- 同じ場所を通らない.



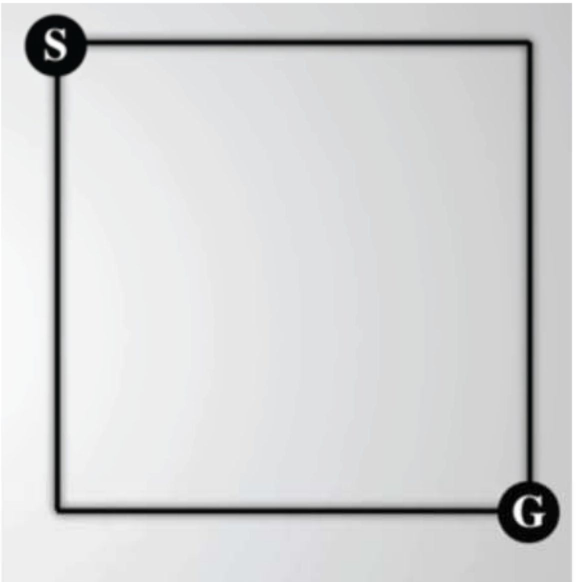


図１：1×1

2通り

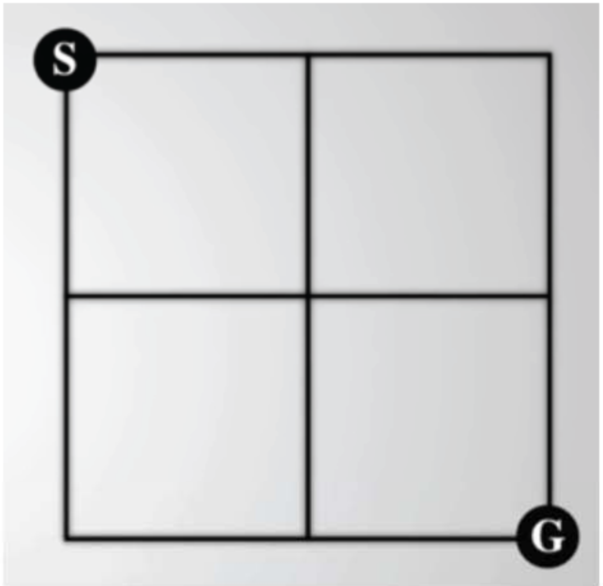


図2：2×2

??通り

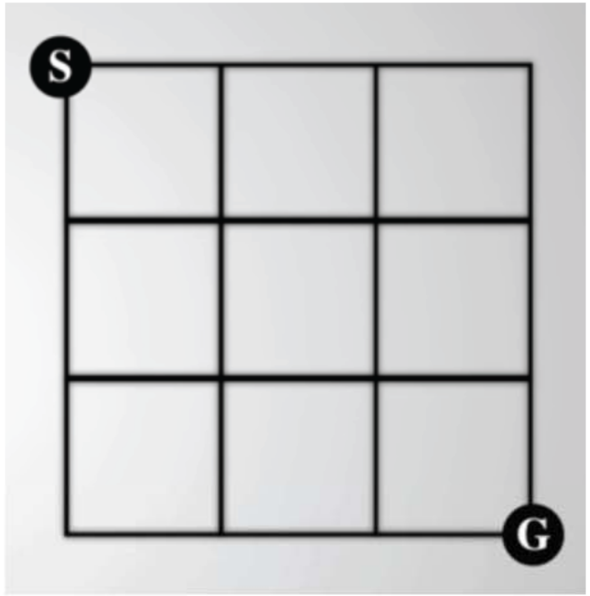


図3：3×3

184通り

ちなみに…

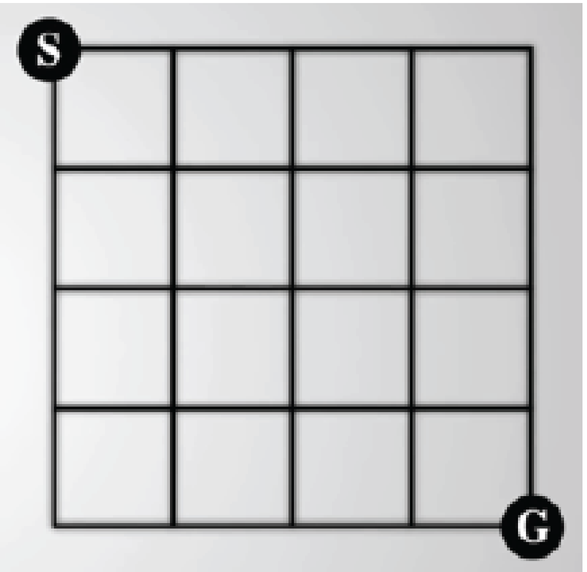


図4：4×4

8512通り

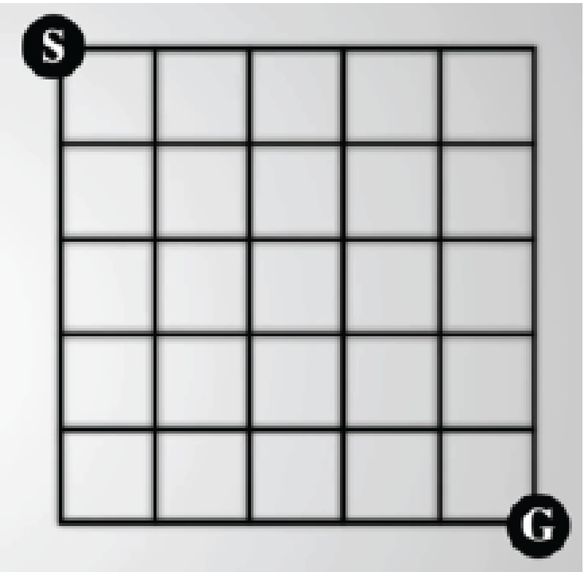


図5：5×5

126万2816通り

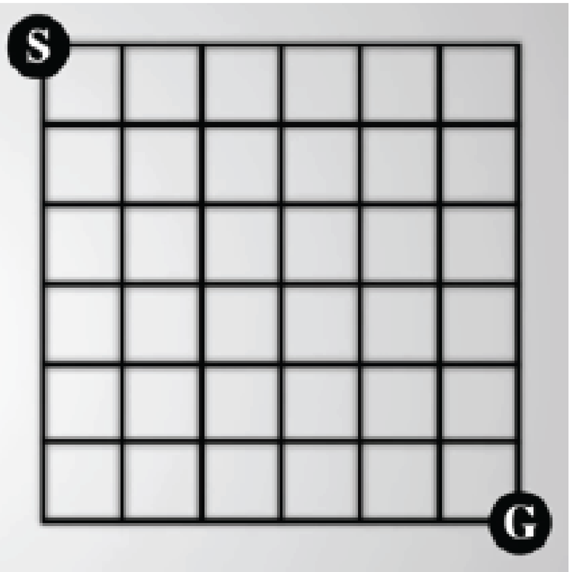


図6：6×6

5億7578万0564通り

急激な増加!
→　指数(以上の)オーダーは探索に時間がかかりすぎる

参考として

- Youtube：『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！

  https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs